

Operazioni “Elementari”

LA MOLTIPLICAZIONE

Una breve riflessione..

COME DEFINIRE LA MOLTIPLICAZIONE?

La definizione di moltiplicazione NON è banale!

Dare una definizione rigorosa di moltiplicazione porta inevitabilmente a parlare di teoria degli insiemi, di equipotenza, biezioni, ecc..

Argomenti non alla portata della scuola elementare..dove la moltiplicazione viene però utilizzata!

Come definire quindi la moltiplicazione nella maniera più corretta possibile?

Solitamente la moltiplicazione viene presentate come **addizione ripetuta**.

Si può definire la moltiplicazione come addizione ripetuta?

E' corretto definire $m \cdot n$ come “l'addizione di m con se stesso n volte”?

COME DEFINIRE LA MOLTIPLICAZIONE?

La definizione di moltiplicazione come addizione ripetuta ha dei “bug”

- **Si può definire la moltiplicazione come addizione ripetuta?**

$$3 \cdot 2 = 3 + 3$$

$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$$

Se consideriamo la moltiplicazione come addizione ripetuta $3 \cdot 2$ e $2 \cdot 3$ sono formalmente diversi perché forniscono addizioni diverse..come è possibile convincere lo studente più ostinato che forniscono lo stesso risultato?

- **Cosa vuol dire definire $m \cdot n$ come l'iterazione dell'addizione di m con se stesso n volte?**

Nella scrittura $m \cdot n$ sono presenti i simboli m e n col ruolo di numeri, mentre nella frase

‘l'addizione di m con se stesso n volte’

il simbolo m mantiene il ruolo di numero, mentre n è un aggettivo numerale cardinale (riferito a ‘volte’).Questo,secondo Fischbein, può costituire un ostacolo quando si introduce la moltiplicazione di numeri non naturali.

Ad esempio $3 \cdot (-2)$

..cosa vuol dire ”la moltiplicazione di 3 con se stesso -2 volte”??

COME DEFINIRE LA MOLTIPLICAZIONE?

La soluzione di questo problema è legato alla natura dei numeri naturali, ovvero si riconduce ad un'altra domanda..

Come definire i numeri naturali?

Solo una **pluralità di interpretazioni** di questo fondamentale concetto matematico, può concorrere a formare l'idea corretta di operazioni.

L'operazione aritmetica di moltiplicazione (così come l'addizione, l'elevamento a potenza, ecc..) ha ampio uso pratico in calcoli scientifici o finanziari.

Ma tali calcoli sono di fatto impossibili se bisogna ogni volta ricondursi alle loro definizioni.

Ci chiediamo allora come si utilizzi la moltiplicazione, con quali metodi e algoritmi.

“Le Moltiplicazioni”

QUANTE MOLTIPLICAZIONI?

Come risolvere una moltiplicazione?

La diversa collocazione geografica e le differenti epoche storiche portano alla luce diversi metodi ed algoritmi per il calcolo della moltiplicazione.

Vediamo alcuni esempi:

- La moltiplicazione in colonna;
- La moltiplicazione medievale;
- La moltiplicazione a “crocetta”;
- La moltiplicazione cinese;
- La moltiplicazione per raddoppio;
- La moltiplicazione con l'aritmetica dei contadini russi.

Per avere un confronto tra i vari metodi consideriamo le due moltiplicazioni

38·75 e 254·32

LA MOLTIPLICAZIONE CON LA TAVOLA PITAGORICA

Una volta introdotte le operazioni aritmetiche si abbandona l'idea di partenza per ridursi alle *tavole pitagoriche*, che con Pitagora hanno veramente poco a che fare, dato che il filosofo greco non aveva a disposizione la *notazione posizionale*, quella oggi 'solita', che fa uso delle *cifre arabe* introdotte in Europa agli inizi del XIII secolo (ma usate in modo incerto ancora per qualche secolo).



**Utilizziamo
le tavole pitagoriche
ogni volta
che eseguiamo
una moltiplicazione
in colonna.**

$$\begin{array}{r} 38 \times \\ \underline{75 =} \\ 190 \\ \underline{266} \\ 2.850 \end{array}$$

LA MOLTIPLICAZIONE CON LA TAVOLA PITAGORICA

- Le tavole pitagoriche sono indispensabili e sufficienti per svolgere il calcolo **solo a patto di integrarle con le proprietà delle operazioni**, compresa l'elevazione a potenza.
- Senza **regole formali** per lo svolgimento del calcolo non è possibile neppure 'mettere in colonna'.
- Per eseguire una semplice moltiplicazione non bastano le regole formali della moltiplicazione, ma sono coinvolte contemporaneamente le proprietà dell'addizione e dell'elevamento a potenza.

9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LA MOLTIPLICAZIONE CON LA TAVOLA PITAGORICA

Nell'eseguire una moltiplicazione in colonna, ad esempio 38×75 utilizziamo quindi le tavole pitagoriche.. ..ma non solo quelle!

Esplicitiamo formalmente i passaggi necessari **solo a mettere in colonna** i due numeri coinvolti:

$38 = (3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)$ e $75 = (7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0)$, quindi

$$\begin{aligned} 38 \times 75 &= && \text{(scritt. pos.)} \\ &= (3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) = && \text{(distr. } \times \text{ su } +) \\ &= ((3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1)) + ((3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \times (5 \cdot 10^0)) = && \text{(distr. } \times \text{ su } +) \\ &= (((3 \cdot 10^1) \times (7 \cdot 10^1)) + ((8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1))) + (((3 \cdot 10^1) \times (5 \cdot 10^0)) + ((8 \cdot 10^0) \times (5 \cdot 10^0))) = && \text{(comm } +) \\ &= (((8 \cdot 10^0) \times (5 \cdot 10^0)) + ((3 \cdot 10^1) \times (5 \cdot 10^0))) + (((8 \cdot 10^0) \times (7 \cdot 10^1)) + ((3 \cdot 10^1) \times (7 \cdot 10^1))) = && \text{(comm } \times) \\ &= (((5 \cdot 10^0) \times (8 \cdot 10^0)) + ((5 \cdot 10^0) \times (3 \cdot 10^1))) + (((7 \cdot 10^1) \times (8 \cdot 10^0)) + ((7 \cdot 10^1) \times (3 \cdot 10^1))) \end{aligned}$$

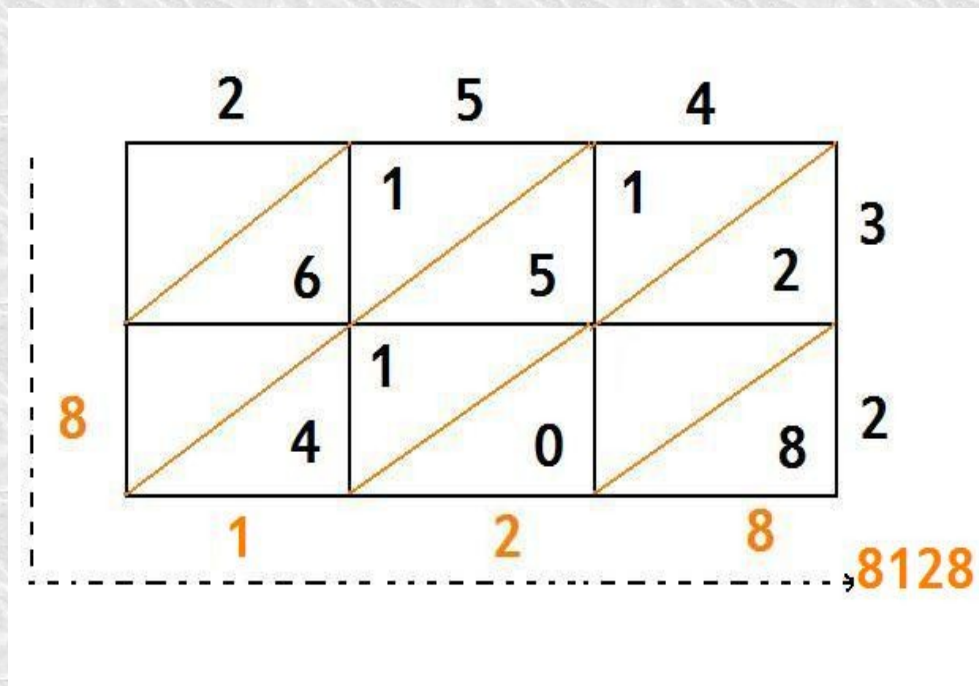
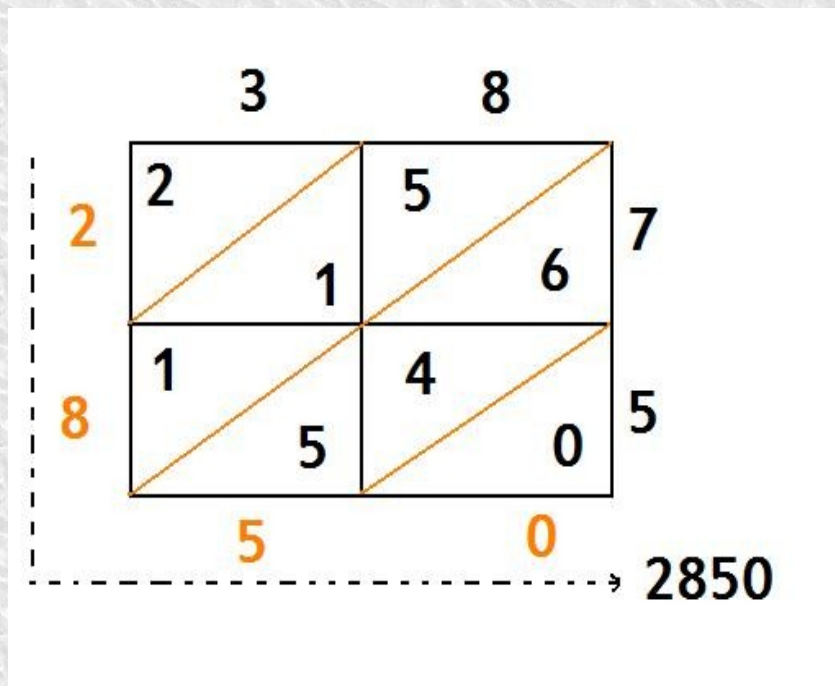
Non andiamo oltre..

Questo ci fa capire quali strutture formali ci siano dietro una “semplice” moltiplicazione in colonna.

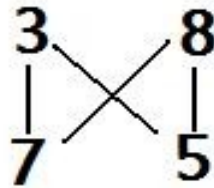
LA MOLTIPLICAZIONE MEDIEVALE

Proprio per questa difficoltà nel ricondursi ogni volta al significato formale della moltiplicazione si sono sviluppati nel corso dei secoli dei metodi “pratici” per risolvere le moltiplicazioni in maniera più (o meno) efficace.

Eccone un primo esempio:



LA MOLTIPLICAZIONE A CROCETTA



$$8 \times 5 = 40$$

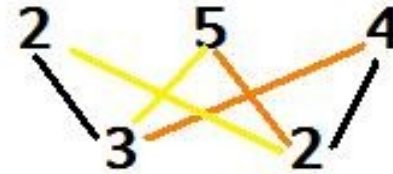
scrivo **0** e riporto **4**

$$3 \times 5 + 8 \times 7 + 4 =$$
$$15 + 56 + 4 = 75$$

scrivo **5** e riporto **7**

$$3 \times 7 + 7 = 28$$

2850



$$4 \times 2 = 8$$

scrivo **8**

$$2 \times 5 + 3 \times 4 = 22$$

scrivo **2** e riporto **2**

$$2 \times 2 + 3 \times 5 + 2 = 21$$

scrivo **1** e riporto **2**

$$3 \times 2 + 2 = 8$$

8128

Osservando l'esecuzione del calcolo di 254×32 e confrontando questo metodo col precedente, si può notare come questo metodo risulti maggiormente difficoltoso all'aumentare del numero delle cifre dei numeri coinvolti nel calcolo.

Si provi ad esempio a risolvere 14237×82756 con questo metodo..

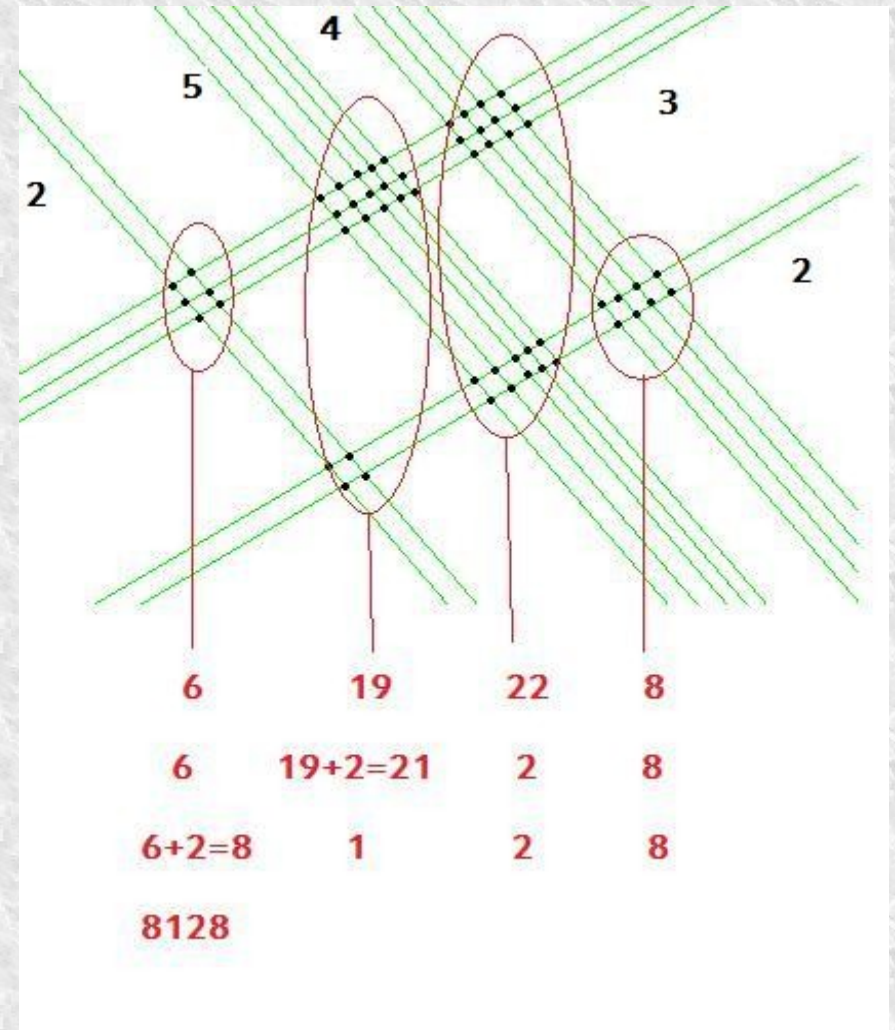
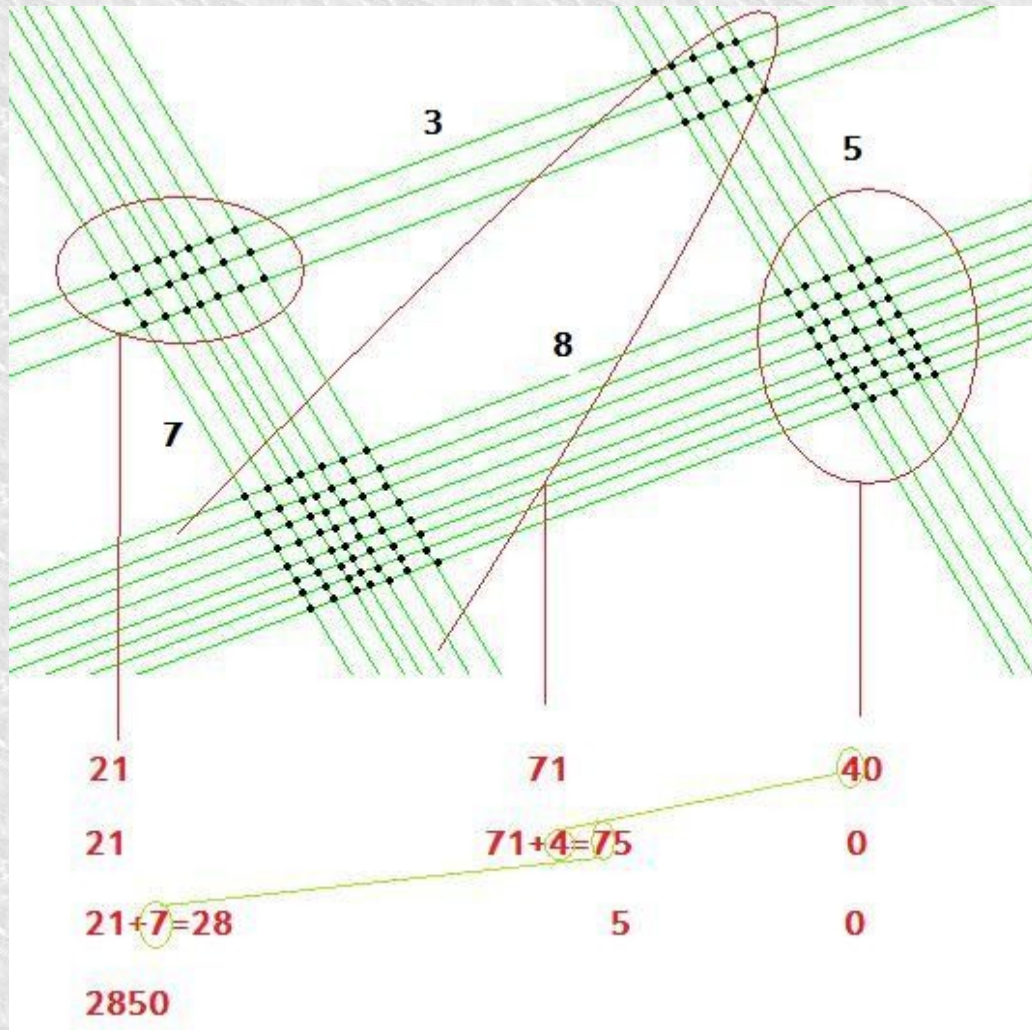
LA MOLTIPLICAZIONE CINESE

Il metodo cinese, o moltiplicazione a bastoncini è basata su un metodo grafico.

- E' un metodo molto rapido per le moltiplicazioni tra numeri **con cifre piccole**, perchè utilizza l'intersezione tra poche rette.
- E' molto veloce anche per numeri con tante cifre..sempre a patto che le cifre siano piccole.

Nelle due moltiplicazioni vedremo infatti che la prima i cui numeri hanno cifre grandi risulta più “difficile” della seconda che ha cifre più piccole.

LA MOLTIPLICAZIONE CINESE



LA MOLTIPLICAZIONE PER RADDOPPIO

1	75	1	254
• 2	150	2	508
• 4	300	4	1016
8	600	8	2032
16	1200	16	4064
• 32	2400	• 32	8128
2400+300+150=		8128	
2850			

La moltiplicazione per raddoppio veniva impiegata nell'antico Egitto.

Per l'esecuzione pratica del calcolo si compila una tabella a due colonne;

La prima riga è costituita da 1 e da uno dei due fattori, il maggiore;

ad essa si fanno seguire altre righe ottenute **raddoppiando** gli elementi della riga precedente, finché nella prima colonna si ottengono numeri non maggiori del secondo fattore.

Si scelgono poi gli elementi della prima colonna di somma il secondo fattore e la somma dei corrispondenti elementi della seconda colonna fornisce il risultato.

UN'ALTRA MOLTIPLICAZIONE DELL'ANTICO EGITTO

38	75
19	150
9	300
4	600
2	1200
1	2400

$$38 \times 75 =$$
$$2400 + 300 + 150 =$$
$$2850$$

32	254
16	508
8	1016
4	2032
2	4064
1	8128

$$32 \times 254 = 8128$$

Un'altro metodo usato dagli egizi, di cui abbiamo testimonianza nel papiro Rhind (1650 a.C.)

Si scrivono stavolta i due numeri sulla prima riga e le righe successive vengono ottenute scrivendo: nella prima colonna il risultato delle **divisioni (intere) del primo numero per 2**;

nella seconda colonna il risultato delle **moltiplicazioni del secondo numero per 2**,

con la condizione di arresto quando nella prima colonna otteniamo 1.

Si cancellano a questo punto le righe corrispondenti a un numero pari della prima colonna.

Il risultato è dato dai rimanenti numeri della seconda colonna.

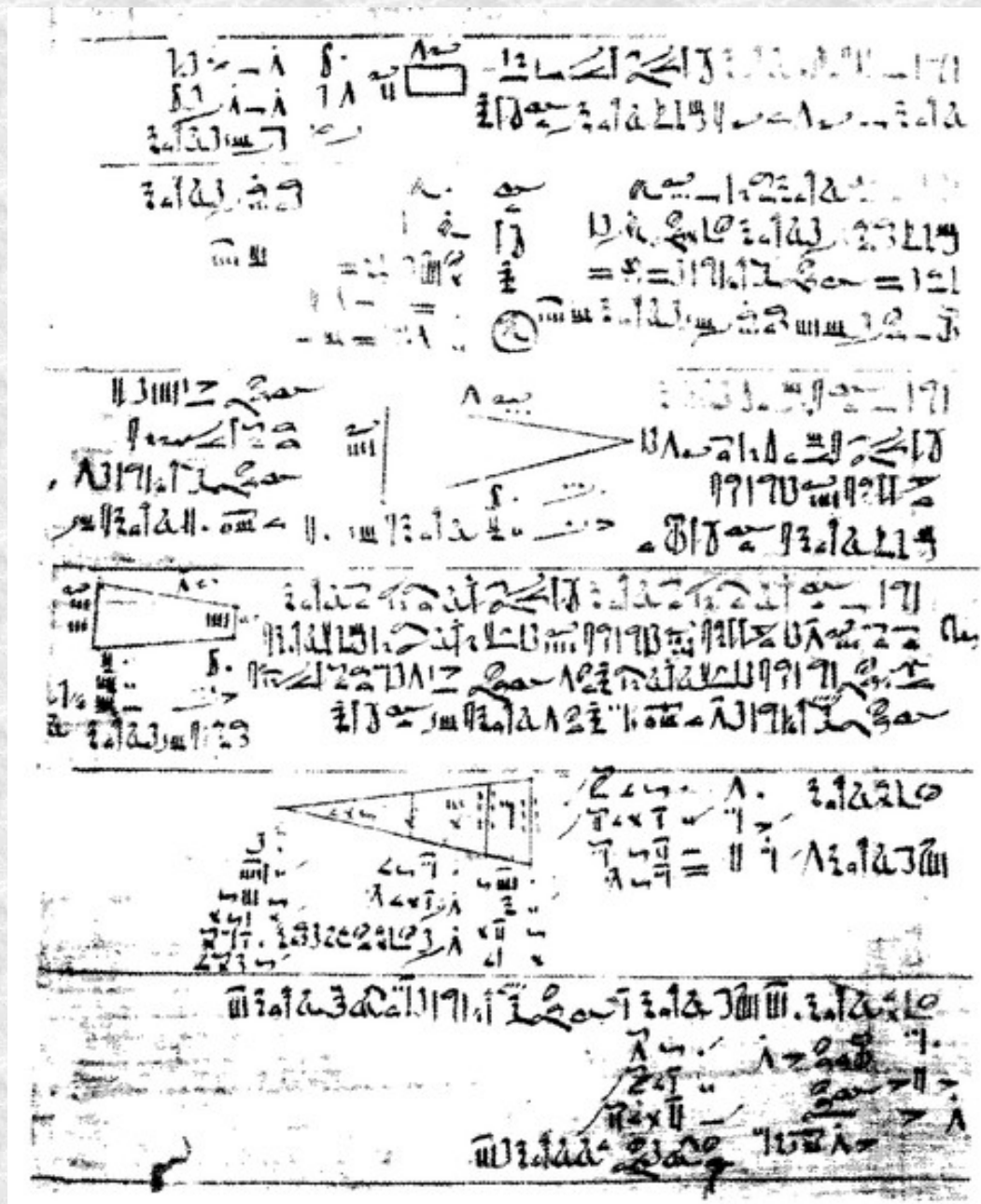
UN'ALTRA MOLTIPLICAZIONE DELL'ANTICO EGITTO

Possiamo notare come questi ultimi due metodi siano più “semplici” dei precedenti.

Per eseguire la moltiplicazione infatti gli antichi Egizi non avevano bisogno delle tabelline.

A loro bastava saper moltiplicare e dividere per 2 e saper sommare.

Molto simile al secondo metodo di moltiplicazione utilizzato dagli egiziani è il metodo dei contadini russi, così chiamato perchè utilizzato realmente dai contadini russi fino a poco tempo fa.



Papiro Rhind 1650 a.C.

LA MOLTIPLICAZIONE CON IL METODO DEI CONTADINI RUSSI

Nel metodo per la moltiplicazione dei contadini russi, dati due numeri n ed m si procede dimezzando ripetutamente n e raddoppiando m fino a che n raggiunge il valore 0, tralasciando eventuali resti. Si segnano i valori dispari di n e alla fine del ciclo si sommano i corrispondenti valori di m .

38	75
• 19	150
• 9	300
4	600
2	1200
• 1	2400

$$\begin{aligned} 38 \times 75 &= \\ 2400 + 300 + 150 &= \\ 2850 & \end{aligned}$$

32	254
16	508
8	1016
4	2032
2	4064
• 1	8128

$$32 \times 254 = 8128$$

LA MOLTIPLICAZIONE CON IL METODO DEI CONTADINI RUSSI

Si noti l'analogia tra questo e il metodo precedente e come si può facilmente passare da uno all'altro..

38	75
• 19	150
• 9	300
4	600
2	1200
• 1	2400

$$\begin{aligned} 38 \times 75 &= \\ 2400 + 300 + 150 &= \\ 2850 & \end{aligned}$$

32	254
16	508
8	1016
4	2032
2	4064
• 1	8128

$$32 \times 254 = 8128$$

38	75
19	150
9	300
4	600
2	1200
1	2400

$$\begin{aligned} 38 \times 75 &= \\ 2400 + 300 + 150 &= \\ 2850 & \end{aligned}$$

32	254
16	508
8	1016
4	2032
2	4064
1	8128

$$32 \times 254 = 8128$$

IL METODO DEI CONTADINI RUSSI CORRISPONDE ALLA MOLTIPLICAZIONE IN COLONNA?

Ci si potrebbe chiedere se questo metodo corrisponde alla tradizionale moltiplicazione che ci viene insegnata alle elementari. L'esempio che segue mostra la moltiplicazione 23×25 eseguita mediante l'algoritmo "dei contadini russi" a sinistra, e mediante il consueto prodotto "in colonna" eseguito però scrivendo i fattori in base 2.

Si può notare la perfetta corrispondenza tra i due calcoli.

			1 1 0 0 1			
			1 0 1 1 1			
23	25	*	$= 25 \cdot 2^0 \cdot 1$	1 1 0 0 1	$= 25 \cdot 2^0 \cdot 1$	
11	50	*	$= 25 \cdot 2^1 \cdot 1$	1 1 0 0 1	$= 25 \cdot 2^1 \cdot 1$	
5	100	*	$= 25 \cdot 2^2 \cdot 1$	1 1 0 0 1	$= 25 \cdot 2^2 \cdot 1$	
2	200		$= 25 \cdot 2^3 \cdot 0$	0 0 0 0 0	$= 25 \cdot 2^3 \cdot 0$	
1	400	*	$= 25 \cdot 2^4 \cdot 1$	1 1 0 0 1	$= 25 \cdot 2^4 \cdot 1$	
0	575		$= 25 \cdot (2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0)$	1 0 0 0 1 1 1 1 1 1	$= 25 \cdot (2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0)$	

Leggendo dal basso verso l'alto, ritroviamo i bit di uno dei due fattori (10111 in base 2 = 23 in base 10). In questo caso, dunque, possiamo considerare i bit di un fattore come "istruzioni" di un semplice linguaggio.

La moltiplicazione fatta seguendo questo algoritmo corrisponde quindi esattamente alla tradizionale moltiplicazione in colonna, in cui i fattori sono scritti in base 2 anziché in base 10.

IL METODO DEI CONTADINI RUSSI CORRISPONDE ALLA MOLTIPLICAZIONE IN COLONNA?

```

S ← 0
A ← m
B ← n
while (A > 0) do
  q ← ⌊A/2⌋
  r ← A - 2q
  if (r = 1)
    S ← S + B
  endif
  A ← q
  B ← 2 · B
endwhile

```

Dato che $27 = (11011)_2$, si ha $a + (2a) + (8a) + (16a) = 27a$

q	r	S	A	B
		0	27	41
13	1	0 + 41 = 41	13	82
6	1	41 + 82 = 123	6	164
3	0	123	3	328
1	1	123 + 328 = 451	1	656
0	1	451 + 656 = 1107	0	1312

In pratica, conviene avere una variabile, chiamata S nell'esempio qui sopra, nella quale si "accumulano" le somme parziali, per evitare di dover tenere traccia di tutto il calcolo.

La correttezza dell'algoritmo si basa sull'identità $(2a+r)m = a(2m) + mr$ dove $n = 2a+r$ ed r è il resto della divisione di n per 2, cioè è il bit meno significativo di n.

La prima riga della tabella a destra corrisponde all'inizializzazione delle variabili.

Poi si entra nel ciclo while.

Si noti che alla fine di ogni ciclo $S + A \cdot B = n \cdot m$, ma all'inizio S vale 0, e alla fine $A = 0$, e quindi S contiene il valore cercato $n \cdot m$.

IL METODO DEI CONTADINI RUSSI CORRISPONDE ALLA MOLTIPLICAZIONE IN COLONNA?

***Esercizio 1** Si scriva un programma in pari/gp che realizzi la procedura per la moltiplicazione illustrata sopra.*

***Esercizio 2** Sia dato un intero positivo N . Si modifichi il programma dell'Esercizio precedente in modo da calcolare il prodotto modulo N , facendo in modo che i risultati parziali non superino mai $2N$ e non usando la divisione con resto, ma solo sottrazioni quando necessario.*

Buon Lavoro!

Giovanna Di Donna